PART2 負の数の平方根と 2 次方程式

要点 ① 負の数の平方根

数の範囲を複素数まで広げると，負の数の平方根を考えることができる。

正の数 3 の平方根は　　と　　であり，$(\sqrt{3})^2=3$，$(-\sqrt{3})^2=3$ である。

$i^2=$　　より

$$(\sqrt{3}\,i)^2=(\sqrt{3})^2 i^2=\qquad,\ (-\sqrt{3}\,i)^2=(-\sqrt{3})^2 i^2=$$

であるから，$\sqrt{3}\,i$，$-\sqrt{3}\,i$ は負の数 -3 の平方根である。

また，-3 の平方根は $\sqrt{3}\,i$，$-\sqrt{3}\,i$ のみであり，これら以外にない。

正の数 a の平方根は $\sqrt{a}$ と $-\sqrt{a}$ であるが，a が負のときにもこの表し方を適用すると，-3 の平方根は　　と　　と表すことができる。このことにより

$$\sqrt{-3}=\sqrt{3}\,i,\quad -\sqrt{-3}=-\sqrt{3}\,i$$

と考えることができる。

$a>0$ のとき，記号 $\sqrt{-a}$ について，$\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$ と定めると，次のことがいえる。

負の数の平方根

$a>0$ のとき

$$\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i \qquad \text{特に}\quad \sqrt{-1}=i$$

$-a$ の平方根は $\pm\sqrt{-a}=\pm\sqrt{a}\,i$

例　$\sqrt{-2}=$　　，$-\sqrt{-8}=$　　　$=$

-5 の平方根は　　　$=$

負の数の平方根 $\sqrt{-a}\ (a>0)$ を含む計算においては，$\sqrt{-a}$ を $\sqrt{a}\,i$ の形にしてから計算する。

要点 ② 2 次方程式の解

複素数の範囲においては，実数 k の平方根は，k の符号に関わらず $\pm\sqrt{k}$ である。よって，2 次方程式 $x^2=k$ の解は，k の符号に関わらず $x=\pm\sqrt{k}$ となる。

例　方程式 $x^2=-7$ の解は　$x=$

また，数学 I で学んだ，2 次方程式の解の公式は，　　　　の符号に関わらず成り立つ。

2 次方程式の解の公式

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

特に $b=2b'$ のとき，2 次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の解は

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

例　2 次方程式 $2x^2+3x+4=0$ の解は

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot2\cdot4}}{2\cdot2}=\frac{-3\pm\sqrt{-23}}{4}$$

今後は，特に断りがない場合，方程式の係数はすべて実数とし，方程式の解は複素数の範囲で考えるものとする。

2 (1) 次の計算をせよ。

(i) $\sqrt{-2}\sqrt{-6}$　　(ii) $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}}$

(2) 次の2次方程式を解け。

(i) $x^2=-9$　　(ii) $7x^2-2x+1=0$

Point Pickup

負の数の平方根

$a>0$ のとき　$\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$　　特に　$\sqrt{-1}=i$

負の数の平方根 $\sqrt{-a}$ $(a>0)$ を含む計算においては，$\sqrt{-a}$ を $\sqrt{a}\,i$ の形にする。

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解法

① 左辺の因数分解を試みる。

② $x^2=k$（k は定数）の解は，k の符号に関わらず　$x=\pm\sqrt{k}$

③ 解の公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

特に，2次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の解は　$x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$

第 3 講　PART2 確認問題

1 $\sqrt{-2}\sqrt{-3} =$ [ア]

① $\sqrt{6}$　② $-\sqrt{6}$
③ $\sqrt{6}\,i$　④ $-\sqrt{6}\,i$

2 $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{-3}} =$ [イ]

① -2　② $\pm 2i$
③ $2i$　④ $-2i$

3 2 次方程式 $x^2 = -4$ の解は，$x =$ [ウ] である。

① -2　② ± 2
③ $\pm 2i$　④ $-i$

4 2 次方程式 $2x^2 - 6x + 7 = 0$ の解は，

$x = \dfrac{[エ] \pm \sqrt{[オ]}\,i}{[カ]}$ である。

PART2 負の数の平方根と 2 次方程式

2 (1) 次の計算をせよ。

(i) $\sqrt{-2}\sqrt{-6}$　　(ii) $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}}$

(2) 次の 2 次方程式を解け。

(i) $x^2=-9$　　(ii) $7x^2-2x+1=0$

[解答]

(1) (i) $\sqrt{-2}\sqrt{-6}=\sqrt{2}\,i\times\sqrt{6}\,i=\sqrt{12}\,i^2=-2\sqrt{3}$

(ii) $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}\,i}=\dfrac{3}{i}=\dfrac{3i}{i^2}=-3i$

(2) (i) $x=\pm\sqrt{-9}=\pm\sqrt{9}\,i=\pm 3i$

(ii) $x=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 7\cdot 1}}{2\cdot 7}=\dfrac{2\pm\sqrt{-24}}{14}=\dfrac{2\pm\sqrt{24}\,i}{14}=\dfrac{2\pm 2\sqrt{6}\,i}{14}=\dfrac{1\pm\sqrt{6}\,i}{7}$

(別解)

$x=\dfrac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-7\cdot 1}}{7}=\dfrac{1\pm\sqrt{-6}}{7}=\dfrac{1\pm\sqrt{6}\,i}{7}$

第 3 講　PART2 確認問題 解答

1　[正解] ア：②

[解説]

$$\sqrt{-2}\sqrt{-3}=\sqrt{2}\,i\times\sqrt{3}\,i \quad \text{[A]}$$
$$=\sqrt{6}\,i^2 \quad \text{[B]}$$
$$=-\sqrt{6}$$

[A]　$a>0$ のとき
$\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$

[B]　$i^2=-1$

2　[正解] イ：④

[解説]

$$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{-3}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\,i} \quad \text{[C]}$$
$$=\frac{2}{i}$$
$$=\frac{2i}{i^2} \quad \text{[D]}$$
$$=-2i$$

[C]　$a>0$ のとき
$\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$

[D]　分母，分子に i を掛ける。

3　[正解] ウ：③

[解説]

$$x^2=-4$$
$$x=\pm\sqrt{-4} \quad \text{[E]}$$
$$=\pm\sqrt{4}\,i$$
$$=\pm 2i$$

[E]　$x^2=k$（k は実数）の解は，k の符号に関わらず
$x=\pm\sqrt{k}$

4 **[正解]** エ：3，オ：5，カ：2

[解説]

$2x^2-6x+7=0$ の解は，解の公式より

$$x=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot2\cdot7}}{2\cdot2}$$ [F]

$$=\frac{6\pm\sqrt{-20}}{4}$$

$$=\frac{6\pm\sqrt{20}\,i}{4}=\frac{6\pm2\sqrt{5}\,i}{4}$$

$$=\boldsymbol{\frac{3\pm\sqrt{5}\,i}{2}}$$

[F]　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

（別解）

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-2\cdot7}}{2}$$ [G]

$$=\frac{3\pm\sqrt{-5}}{2}$$

$$=\boldsymbol{\frac{3\pm\sqrt{5}\,i}{2}}$$

[G]　2 次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の解は

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$